

# MODELOVÁNÍ A SIMULACE SLOŽITÝCH SYSTÉMŮ

Zdislav Exnar, Marcela Koščová

Žilinská univerzita v Žiline, Elektrotechnická fakulta

Katedra základov inžinierstva

exnar@lm.uniza.sk

Katedra experimentálnej elektrotechniky

mkoscova@lm.uniza.sk

## ABSTRAKT

*Cílem příspěvku je začlenit do kontextu kybernetiky prostředky modelování a simulace. Za základ je použita analýza metod popisu systému, jejich stručný rozbor a možnosti jejich použití k vytvoření modelů. Každá část obsahuje i příklad využití modelů k simulacím v různých modelovacích nástrojích. Přínosem je shrnutí poznatků o modelech a simulacích v krátkém kontextu technických prostředků na modelování a simulace. V závěru je uveden příklad na vytvoření modelu a simulace obnovitelného zdroje energie.*

## ÚVOD

Teorie systémů, modelování a simulací velmi úzce souvisí s kybernetikou, která je zakladatelem tohoto vědního oboru N. Wienerem definovaná jako věda o řízení a sdělování v strojích a živých organismech. Myslím, že neuděláme chybu, když platnost zákonů kybernetiky rozšíříme i na ekonomické a společenské procesy. Kybernetika tak úspěšně formulovala projev kauzality, jeden ze základních filozofických zákonů, jako projev nutné souvislosti jevů z nichž jeden (příčina) určuje druhý (účinek). Postupem času se ukázalo, jak mocný nástroj právě kybernetika přinesla pro modelování systémů a simulaci jejich projevů. To v současnosti umožňuje navrhnout velmi kvalitní systémy řízení a určit jak se budou reálné systémy chovat třeba i v extrémních podmínkách. Důsledným použitím modelů a simulací jsme se v minulosti mohli vyhnout takovým katastrofám, jako byl Černobyl.

Popis systémů, který podmiňuje vytvoření modelu, je mnohdy komplikovaný. V podstatě existují dva základní přístupy:

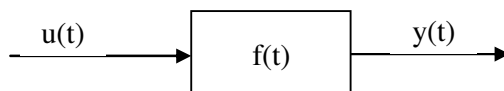
- vnější popis – známý pod pojmem black-box (černá skříňka). Popis je založen na principu znalosti odezvy systému (výstupu) na známý vstupní signál,
- vnitřní popis – založený na popisu vnitřní struktury systému soustavou diferenciálních rovnic, z kterých se definuje stavový model systému.

Výsledkem popisu systému je model, který následně můžeme použít k ověření reakce systému na různé podněty (vstupní signály, poruchy,...). Tento proces se nazývá simulací a to, jak je vykonávaný, záleží na typu modelu (myšlenkový model → představy o reakci systému; fyzický model → skutečná replika anebo replika v měřítku, která se podrobuje vlivu vnějších podnětů; matematický model → umožňuje použití výpočetní techniky).

V další části článku se pokusíme o nástin tvorby jednotlivých modelů a možností simulací s těmito modely.

## JEDNOROZMĚROVÝ SYSTÉM

Základním prostředkem jak vytvořit matematický model jednoduchého systému je jeho popis pomocí přenosové funkce. Uvažujeme jednorozměrový systém s jedním vstupem  $u(t)$  a jedním výstupem  $y(t)$  (obr.1).



**Obrázek 1: Jednoduchý systém řízení**

Takovýto systém je možné popsat diferenciální rovnicí ve tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \quad (1)$$

Použitím Laplaceovy transformace a úpravou rovnice (1) dostaneme přenosovou funkci systému

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (2)$$

Vztah vyjadřující přenosovou funkci umožňuje najít odezvu systému na vstupní signál

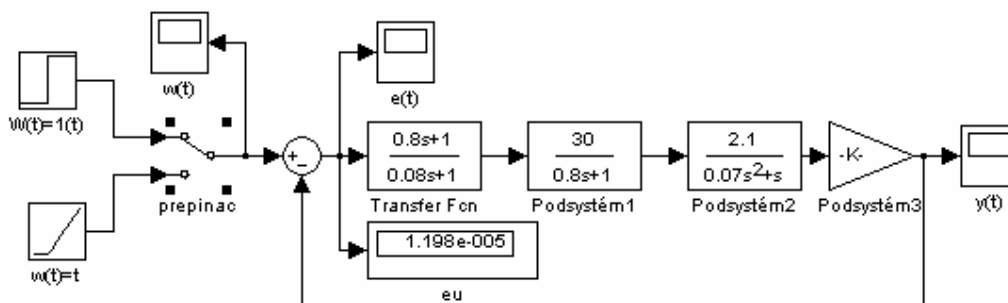
$$Y(s) = F(s) \cdot U(s). \quad (3)$$

Popis systému s využitím přenosové funkce umožňuje simulaci systému pro různé vstupní signály. Častěji se ale používá porovnání vlastností různých systémů podle odezvy na typické vstupní signály, jako jsou:

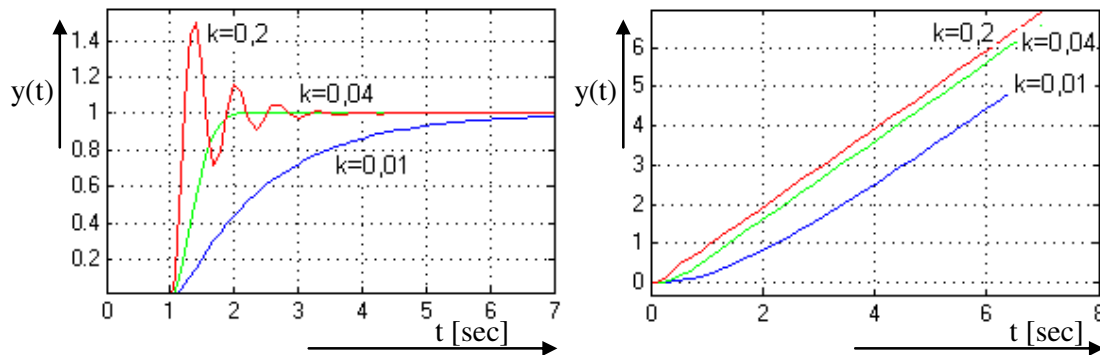
- jednotkový skok  $1(t)$  – jednotková, rychlá změna vstupního signálu z jedné hodnoty na jinou, která se dále nemění,
- jednotkový impuls  $\delta(t)$  – na vstup je přiveden krátký impuls, jehož plocha je rovna 1,
- signál plynule narůstající s časem  $t$  – průběh signálu je popsán rovnicí  $u(t)=t$ .

Výsledkem činnosti systému bude jeho odezva na vybraný vstupní signál, která je typická pro daný systém a jeho vlastnosti. Úpravou vlastností můžeme následně upravit i odezvu systému a tak nastavit jeho požadovanou (optimální) odezvu.

Navrhnutý způsob analýzy systému je jednoduchý a umožňuje vytvořit relativně snadno počítačový model v některém ze simulačních programů např. MatLab. Ten potom následně umožní experimentování s modelem a úpravou jeho vlastností nebo jeho struktury tak, aby vyhovoval optimálním požadavkům na systém.



**Obrázek 2: Modelu systému v prostředí Matlab – Simulink**



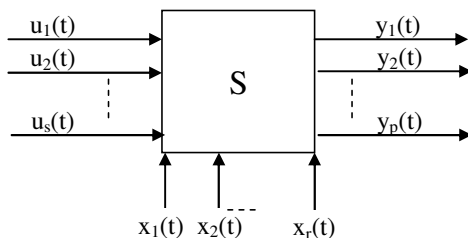
**Obrázek 3: Simulace odezvy modelu systému na  $1(t)$  a  $\delta(t)$  v MatLab – Simulink**

Uvedený přístup s využitím prostředí MatLab je vhodný zejména pro výuku, protože relativně jednoduchým způsobem a v krátkém čase je možné sestavit model systému a následně s ním uskutečnit řadu experimentů. Podle našich zkušeností je možné v čase jedné vyučovací hodiny navrhnout a realizovat model s kterým následně uskutečnit experimenty ukazující závislost výstupní veličiny na struktuře systému.

Výhodou některých simulačních programů je možnost jejich připojení na reálný systém. Tímto systémem může být fyzický model nebo skutečné výrobní zařízení. Porovnáním činnosti ideálního systému (modelu) s reálným systémem může být řešena optimalizace činnosti celého systému.

## MNOHORozměrový SYSTÉM

Popis systému pomocí přenosové funkce, která nezohledňuje vnitřní strukturu systému je použitelný jen u jednorozměrových systémů. V praxi a zejména při analýze společensko-ekonomických systémů se setkáváme s mnohorozměrovými systémy, které mají více vstupů a výstupů (obr.4).



**Obrázek 4: Mnohorozměrový systém**

Vstupy a výstupy mnohorozměrových systémů potom tvoří vektory

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_s(t) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

K systému je možné určit soubor vnitřních proměnných  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_r(t)$ , které jsou též závislé na čase a je možné je vyjádřit v podobě sloupcového vektoru  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

který se nazývá stavovým vektorem. Stav systému je potom daný jeho stavem v čase  $t=t_0$  a hodnotami vektoru vstupního signálu  $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t)]. \quad (6)$$

Výstupní signál potom bude určený nejen hodnotou vstupního signálu  $\mathbf{u}(t)$  ale i hodnotou stavového vektoru  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]. \quad (7)$$

Systémy je možné obecně popsat obyčejnou diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu nebo  $n$ -diferenciálními rovnicemi 1. řádu. Použitím soustavy  $n$ -diferenciálních rovnic 1. řádu dostaneme tzv. stavovou rovnici

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r, u_1, u_2, \dots, u_s, t) \quad (8)$$

Výstupní veličiny systému jsou potom funkcí stavových a vstupních veličin a jsou popsány tzv. výstupní rovnicí

$$y_j(t) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_r, u_1, u_2, \dots, u_s, t) \quad (9)$$

Obecný zápis nelineárního zobrazení tvoří soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (10)$$

V mnohých případech je možné použít linearizaci stavové a výstupní rovnice. Vektorový zápis je v tvaru

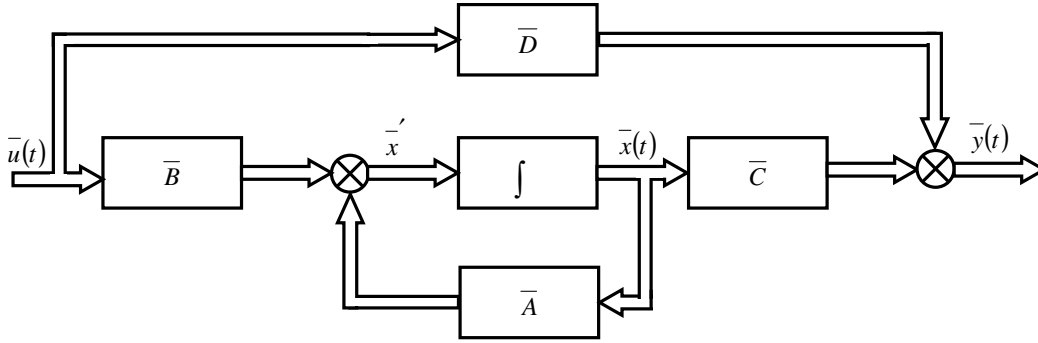
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t) && \text{– stavová rovnice,} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{u}(t) && \text{– rovnice výstupu.} \end{aligned} \quad (11)$$

Jednotlivé matice představují:

- $\mathbf{A}(t)$  – matice systému,
- $\mathbf{B}(t)$  – matice buzení,
- $\mathbf{C}(t)$  – matice výstupu,
- $\mathbf{D}(t)$  – matice převodu.

Často se v aplikacích setkáváme se stacionárními systémy. Stacionární systém je systém invariantní v čase, pro který platí, že matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  jsou konstantními maticemi a jejich prvky jsou též konstantní.

Spojité stacionární dynamický systém je možné znázornit blokovým schématem (obr. 5).

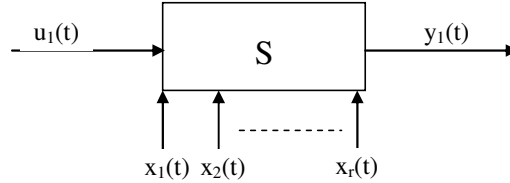


**Obrázek 5: Blokové schéma stavového modelu mnohorozměrového stacionárního systému**

Stav systému je určován jeho předcházejícím stavem, jeho historií, která je v modelu reprezentována integrátorem (systémem zpoždění u diskrétních systémů). V reálných systémech to jsou prvky, které akumulují energii, jako jsou setrvačné hmoty, kapacity, indukčnosti,...

Stavový vektor  $\mathbf{X}$  může být v některých případech uvažován jako abstraktní veličina, kterou není možné obecně měřit. Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou veličiny, které mají konkrétní fyzikální význam.

Stavový systém může být ve zvláštním případě reprezentován jednorozměrným systémem (obr.6), u kterého jsou vstupními a výstupními funkcemi skaláry  $u$  a  $y$ . Stav  $\mathbf{x}$  může být vektorem a počet jeho stavových proměnných závisí na řádu diferenciální rovnice.



**Obrázek 6: Jednorozměrový lineární dynamický systém**

Při určování stavového modelu vycházíme z diferenciální rovnice,

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad (12)$$

která je obecně  $n$ -tého řádu a tak stavový model bude obsahovat  $n$  stavových proměnných  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Stavové veličiny volíme v tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

K vyjádření  $y^{(n)}(t)$  použijeme derivaci poslední ze stavových veličin

$$x_n'(t) = y^{(n)}(t) \quad (14)$$

a k vyjádření  $y^{(n)}(t)$  použijeme diferenciální rovnici systému

$$y^{(n)}(t) = \frac{b_0}{a_n} u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} y'(t) - \frac{a_0}{a_n} y(t) \quad (15)$$

Prvky stavové rovnice dostaneme úpravou rovnic v tvaru

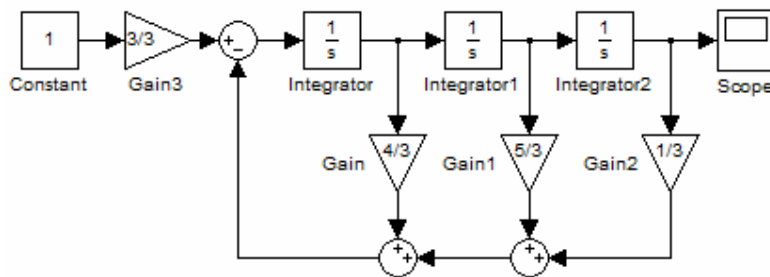
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= \frac{b_0}{a_n} u(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Stavový model je potom možné vyjádřit v maticovém tvaru

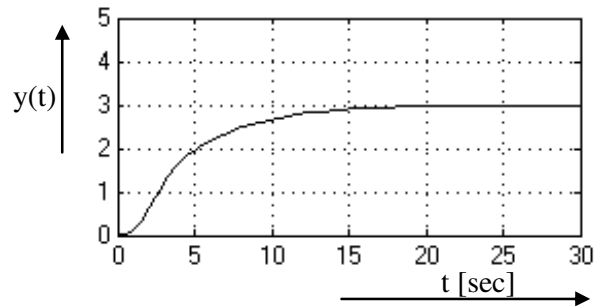
$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (17)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (18)$$

Stavový model je možné zakreslit v podobě blokového schématu. Realizace modelu v modelovacím prostředí MatLab – Simulink a jeho odezva na vstupní signál je uvedena na obrázku 7 a 8.

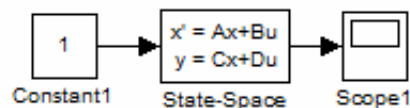


**Obrázek 7: Realizace modelu jednorozměrového dynamického systému v prostředí MatLab – Simulink**



**Obrázek 8: Simulace odezvy stavového modelu systému na vstupný signál  $u(t)$  prostředí MatLab – Simulink**

Modelovací a simulační prostředek MatLab – Simulink umožňuje i kratší, přímý zápis modelu s využitím stavových rovnic (obr.9).



**Obrázek 9: Realizace jednorozměrového lineárního dynamického systému v prostředí MatLab – Simulink s využitím stavového maticového zápisu**

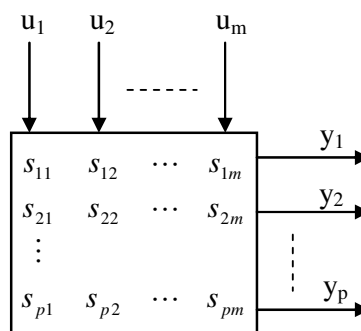
Vícerozměrové modely umožňují věrněji popsat objektivní realitu ale sestavení modelu je komplikovanější a vyžaduje větší znalosti a zkušenosti z oblasti matematické analýzy. Při práci s těmito modely je potřebné ve větší míře věnovat pozornost validite modelu, protože se ztrácí oproti vnějšímu popisu systému názornost zobrazení. Na druhé straně je to jediná cesta jak vytvořit vícerozměrový systém.

## PŘENOSOVÁ MATICE

Přenos jednorozměrového systému  $F(s)$  je dán vztahem

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (19)$$

U vícerozměrových systému je přenos definován přenosovou maticí  $\mathbf{F}(s)$ , která určuje vztah mezi vektorem obrazů výstupu  $\mathbf{Y}(s)$  a vektorem obrazu výstupního signálu  $\mathbf{U}(s)$  (obr.10).



**Obrázek 10: Stavový model s přenosovou maticí**

Použitím Laplaceovy transformace na stavovou rovnici dostaneme

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{aligned} \quad (20)$$

za předpokladu nulových počátečních podmínek  $\mathbf{X}(0) = 0$  můžeme stavovou rovnici přepsat ve tvaru

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (21)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice. To umožňuje určit obraz stavu

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (22)$$

a dosazením do rovnice výstupu dostaneme

$$\mathbf{Y}(s) = \{\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}\}\mathbf{U}(s) \text{ a správně platí } \mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{U}(s) \quad (23)$$

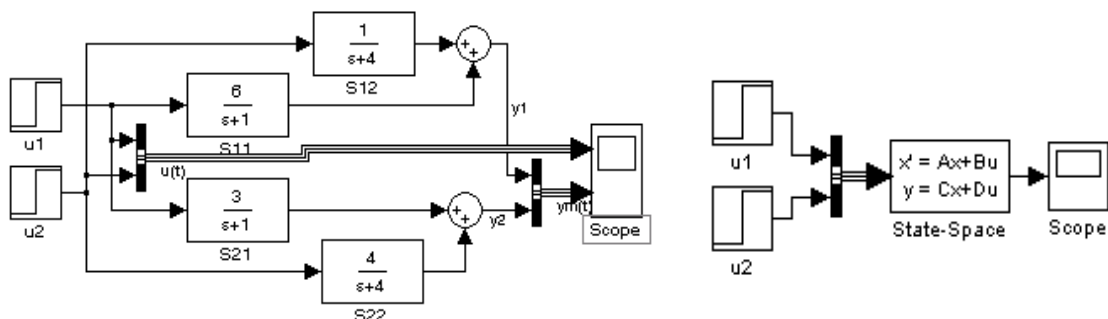
potom pro přenos platí

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (24)$$

**Příklad:** Analyzujeme model popsaný diferenciálními rovnicemi

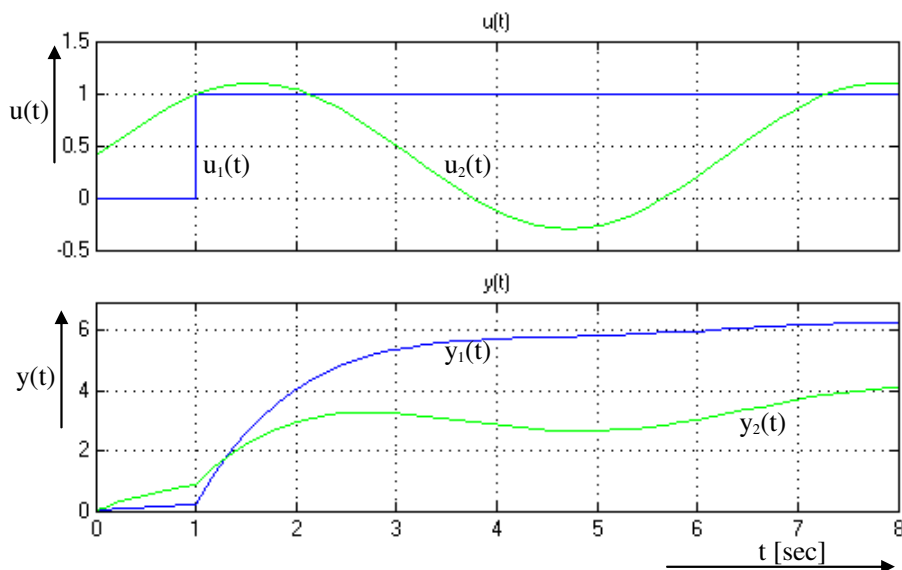
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3u_1(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) - x_2(t) \\ y_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ y_2(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

Výše uvedeným postupem byly sestavené stavové rovnice, které byly použité k vytvoření stavového modelu v prostředí MatLab – Simulink (obr. 11). Typická odezva systémů na vstupní signál je uvedena na obrázku 12.



**Obrázek 11: Stavový model vytvořený na základě přenosové matice a realizovaný v MatLab – Simulink**



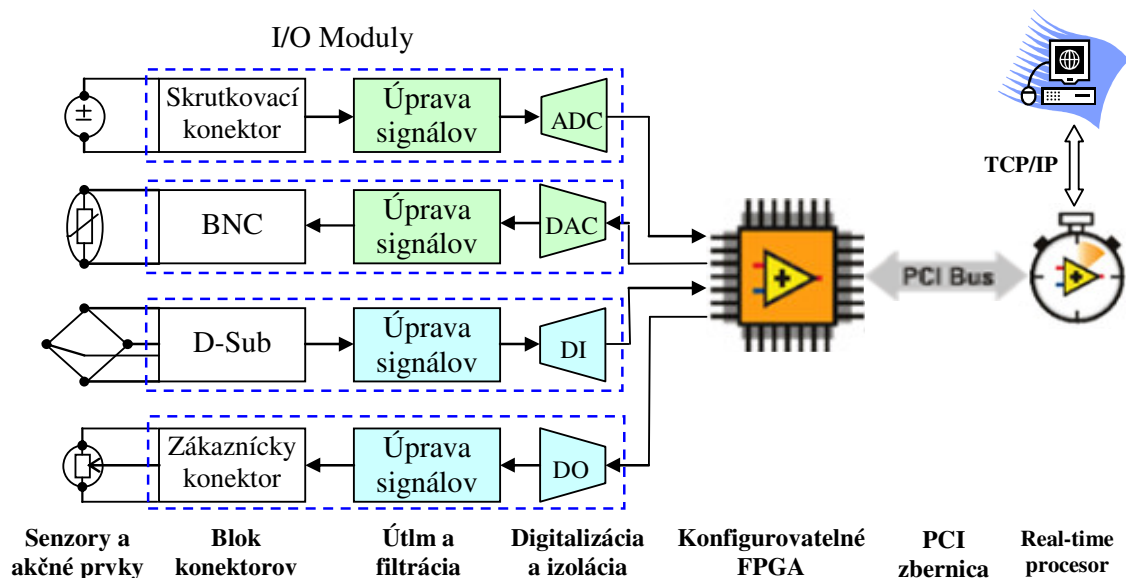


**Obrázek 12: Vstupný a výstupný signál modelu obr. 11**

Jednou z důležitých vlastností modelů je jejich validita, tj. jak přesně výsledky simulace odrážejí skutečnost. Je třeba posoudit, či nebyly při sestavování modelu opomenuty důležité vlastnosti systému, které mají zásadní vliv na simulace anebo či nedošlo k chybě při vlastním modelování. V předcházející části byl uveden příklad, který ukazuje možnost vytvoření modelu dvěma nezávislými cestami a tak ověřit výsledky simulací, které při stejných vstupních signálech musí být srovnatelné.

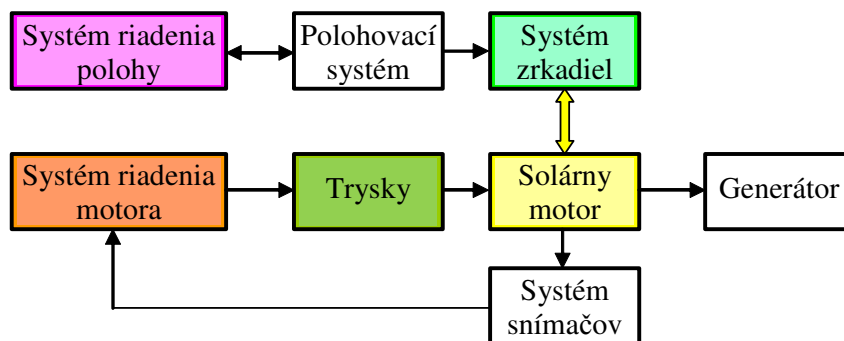
## POUŽITÍ MODELŮ A SIMULACÍ V TECHNICKÉ PRAXI

V technické praxi nečasto setkáváme s využitím modelů v reálných technických zařízeních, které používají řídicí systémy založené na optimalizaci jejich regulačních pochodů s využitím idealizovaných výstupů z modelů. Velmi často se modely používají i na ověření vlastností celého systému tak, že řídicí jednotka je vytvořena v podobě počítačového modelu a s vlastní řízený systém je spojen s řídicí jednotkou vstupně – výstupním zařízením. Tyto aplikace vyžadují ve velké většině případů odezvu (reakci) modelů systémů v reálném čase, tj. s minimálním zpožděním signálu. Vysoká rychlost odezvy modelů na vstupní signály vyžaduje použití zvláštních technologií ve spojení s výpočtovými prostředími. Mezi takové se zařazují technologie programovatelných logických polí (FPGA) a real-time procesorů. Takovéto prostředí je možné najít v produktu LabVIEW ve spojení s Compact RIO firmy National instrument (obr. 13).



**Obrázek 13: Princíp zpracování signálů v Compact RIO**

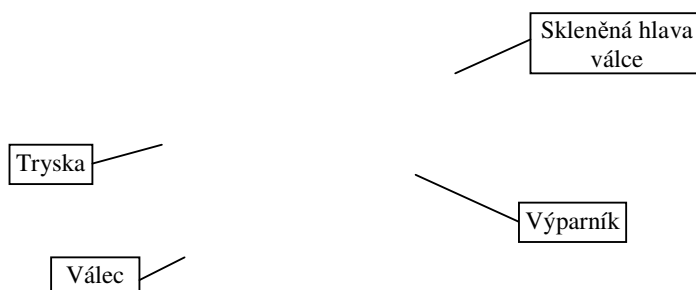
Uved'me príklad aplikačného výzkumu alternatívnych energetických zdrojů na pracovišti autorů. Je navrhnut tepelný parní motor s generováním páry v pracovním prostoru motoru.

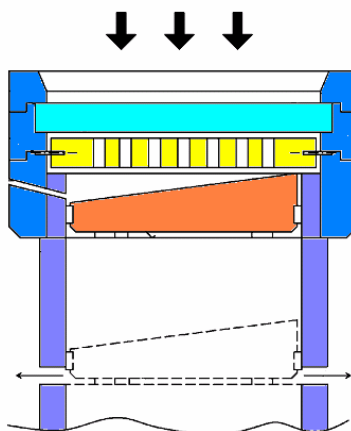


**Obrázek 14: Koncepte solárního motoru**

Základem činnosti motoru je soustředění slunečního záření koncentrátorem přes skleněnou hlavu válce do jeho pracovního prostoru, který se zahřeje a po vstříknutí vody na výparník se vytvoří pára, která předá svoji tlakovou energii na pohyb pístu (obr. 15).

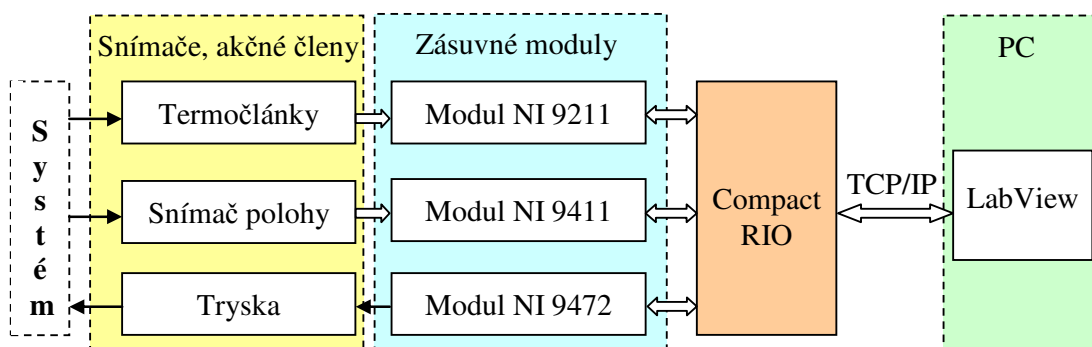
Koncentrovaná sluneční energie





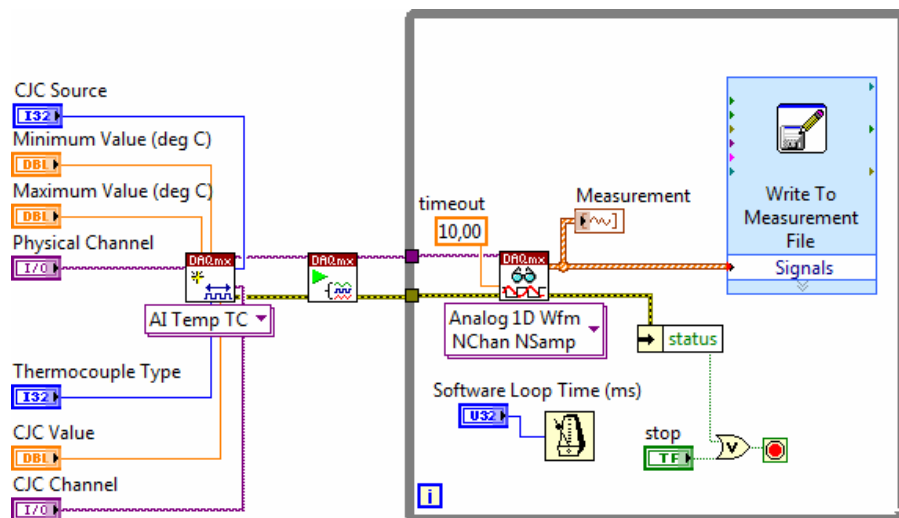
**Obrázek 15: Princip solárního motoru**

Základním problémem je vstřikování vody na teplý výparník. Vstupními veličinami tu jsou poloha pístu, teplota vstřikované vody, teplota výparníku a rychlost pohybu pístu. Výstupním signálem je impuls pro ovládání vstřikovací jednotky. Princip měřicího a řídicího systému v prostředí LabVIEW je na obrázku 16.



**Obrázek 16: Princip měřicího a řídicího systému solárního motoru**

Příklad jedné z varianty modelu měřicího a řídicího systému v prostředí LabVIEW ve spojení s Compact RIO je uveden na obrázku 17.



**Obrázek 17: Varianta měřicího a řídicího systému solárního motoru v využití LabVIEW**

## ZÁVĚR

Přístup k modelování a simulaci má mnoho podob a variantů. Výběr vhodné metody závisí na řešení problému a zejména jeho algoritmizaci. Využití modelování a simulací má uplatnění v různých oborech lidské činnosti a s nástupem nového století se stále více začíná uplatňovat matematické modelování s využitím počítačů. Velkou perspektivu má tento trend ve školství zejména ve spojení s virtuální realitou, kde simulace dostávají zcela nový rozměr a umožní pochopit i složité systémy.

## PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podporovaná Agenturou na podporu výzkumu a vývoje na základě smlouvy č. APVV-0448-06 a projektem VEGA 2006, číslo úlohy 1/3080/16.

## LITERATURA:

- [1] HORÁČEK, Petr. Systémy a modely. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-01923-3.
- [2] ŠLECHTA, Jan, HAVLENA Vladimír. Teorie dynamických systémů. Praha: ČVUT, 2002. ISBN 80-01-01971-3.
- [3] KŘUPKA, J.: Teorie systémů I. Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Pardubice, 2006.
- [4] Křupka, J. – Kašparová, M.: Úvod do teorie systémů. Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Pardubice, 2007. ISBN 978-80-7194-955-8.
- [5] BALÁTĚ, J.: Automatické řízení. BEN-technická literatura, Praha 2003. ISBN 80-7300-020-2.